EJEMPLO 5 Encuentre $D_x y$ si $y = \dfrac{2}{x^4+1} + \dfrac{3}{x}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x\left(\frac{2}{x^4+1}\right) + D_x\left(\frac{3}{x}\right) \\ &= \frac{(x^4+1)D_x(2) - 2D_x(x^4+1)}{(x^4+1)^2} + \frac{xD_x(3) - 3D_x(x)}{x^2} \\ &= \frac{(x^4+1)(0) - (2)(4x^3)}{(x^4+1)^2} + \frac{(x)(0) - (3)(1)}{x^2} \\ &= \frac{-8x^3}{(x^4+1)^2} - \frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Demuestre que la regla para la potencia se cumple para exponentes enteros negativos, es decir,

$$\boxed{D_x\left(x^{-n}\right) = -nx^{-n-1}}$$

$$D_x(x^{-n}) = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

■

Como parte del ejemplo 5, vimos que $D_x(3/x) = -3/x^2$. Ahora tenemos otra forma de ver la misma cosa.

Revisión de conceptos

1. La derivada de un producto de dos funciones es la primera por _____ más la _____ por la derivada de la primera. En símbolos, $D_x\left[f(x)g(x)\right] =$ _____.

2. La derivada de un cociente es el _____ por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del _____, todo dividido entre el _____. En símbolos, $D_x\left[f(x)/g(x)\right] =$ _____.

3. El segundo término (el término que incluye a h) en la expansión de $(x + h)^n$ es _____. Este hecho lleva a la fórmula $D_x\left[x^n\right] =$ _____.

4. L se denomina operador lineal, si $L(kf) =$ _____ y $L(f + g) =$ _____. El operador de derivación denotado por _____ es un operador lineal.

Conjunto de problemas 2.3

En los problemas del 1 al 44, encuentre $D_x y$ mediante las reglas de esta sección.

1. $y = 2x^2$

2. $y = 3x^3$

3. $y = \pi x$

4. $y = \pi x^3$

5. $y = 2x^{-2}$

6. $y = -3x^{-4}$

7. $y = \dfrac{\pi}{x}$

8. $y = \dfrac{\alpha}{x^3}$

9. $y = \dfrac{100}{x^5}$

10. $y = \dfrac{3\alpha}{4x^5}$

11. $y = x^2 + 2x$

12. $y = 3x^4 + x^3$

13. $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

14. $y = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + \pi x + \pi^2$

15. $y = \pi x^7 - 2x^5 - 5x^{-2}$

16. $y = x^{12} + 5x^{-2} - \pi x^{-10}$

17. $y = \dfrac{3}{x^3} + x^{-4}$

18. $y = 2x^{-6} + x^{-1}$

19. $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

20. $y = \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$

21. $y = \dfrac{1}{2x} + 2x$

22. $y = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{2}{3}$

23. $y = x(x^2 + 1)$

24. $y = 3x(x^3 - 1)$

25. $y = (2x + 1)^2$

26. $y = (-3x + 2)^2$

27. $y = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$

28. $y = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$

29. $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$

30. $y = (x^4 + 2x)(x^3 + 2x^2 + 1)$

31. $y = (5x^2 - 7)(3x^2 - 2x + 1)$

32. $y = (3x^2 + 2x)(x^4 - 3x + 1)$

33. $y = \dfrac{1}{3x^2 + 1}$

34. $y = \dfrac{2}{5x^2 - 1}$

35. $y = \dfrac{1}{4x^2 - 3x + 9}$

36. $y = \dfrac{4}{2x^3 - 3x}$

37. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

38. $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$

39. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{3x + 5}$

40. $y = \dfrac{5x - 4}{3x^2 + 1}$

41. $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

42. $y = \dfrac{5x^2 + 2x - 6}{3x - 1}$

43. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

44. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

45. Si $f(0) = 4$, $f'(0) = -1$, $g(0) = -3$, y $g'(0) = 5$, encuentre (a) $(f \cdot g)'(0)$ (b)$(f + g)'(0)$ (c)$(f/g)'(0)$

46. Si $f(3) = 7$, $f'(3) = 2$, $g(3) = 6$, y $g'(3) = -10$, encuentre (a) $(f - g)'(3)$ (b) $(f \cdot g)'(3)$ (c) $(g/f)'(3)$

47. Utilice la regla del producto para mostrar que $D_x\left[f(x)\right]^2 = 2 \cdot f(x) \cdot D_x f(x)$.

EXPL **48.** Desarrolle una regla para $D_x\left[f(x)g(x)h(x)\right]$.

49. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 - 2x + 2$ en el punto $(1, 1)$.

50. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = 1/(x^2 + 4)$ en el punto $(1, 1/5)$.

51. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = x^3 - x^2$, donde la recta tangente es horizontal.

52. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$, en donde la recta tangente tenga pendiente 1.

53. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = 100/x^5$, donde la recta tangente sea perpendicular a la recta $y = x$.

54. Demuestre el teorema F de dos formas.

55. La altura, s, medida en pies, a la que se encuentra un balón, por encima del suelo a los t segundos está dada por $s = -16t^2 + 40t + 100$.

(a) ¿Cuál es su velocidad instantánea en $t = 2$?

(b) ¿Cuándo su velocidad instantánea es cero?

56. Una pelota rueda hacia abajo a lo largo de un plano inclinado, de modo que su distancia s desde su punto de inicio después de t segundos es $s = 4.5t^2 + 2t$ pies. ¿Cuándo su velocidad instantánea será de 30 pies por segundo?

≈ **57.** Existen dos rectas tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto $(2, 5)$. Encuentre las ecuaciones de ambas. *Sugerencia*: sea (x_0, y_0) un punto de tangencia. Determine dos condiciones que (x_0, y_0) debe satisfacer. Véase la figura 4.

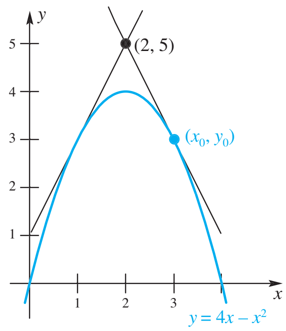

Figura 4

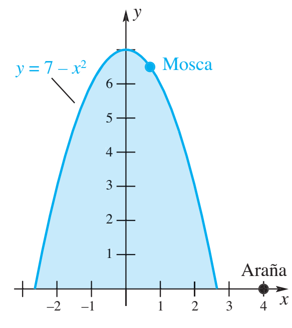

Figura 5

≈ **58.** Una viajera espacial se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2$. Cuando apague los motores, continuará viajando a lo largo de la recta tangente en el punto en que ella esté en ese momento. ¿En qué momento debe apagar los motores para que alcance el punto $(4, 15)$?

≈ **59.** Una mosca se arrastra de izquierda a derecha a lo largo de la parte superior de la curva $y = 7 - x^2$ (véase la figura 5). Una araña espera en el punto $(4, 0)$. Determine la distancia entre los dos insectos cuando se ven por primera vez.

60. Sea $P(a, b)$ un punto en la parte del primer cuadrante de la curva $y = 1/x$ suponga que la recta tangente en P interseca al eje x en A. Demuestre que el triángulo AOP es isósceles y determine su área.

61. El radio de una sandia esférica está creciendo a una velocidad constante de 2 centímetros por semana. El grosor de la cáscara siempre es la décima parte del radio. ¿Qué tan rápido está creciendo el volumen de la cáscara al final de la quinta semana? Suponga que el radio inicialmente es cero.

CAS **62.** Vuelva a resolver los problemas del 29 al 44 en una computadora y compare sus respuestas con las obtenidas de forma manual.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** la derivada de la segunda; segunda; $f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$ **2.** denominador, denominador; cuadrado del denominador; $[g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)]/g^2(x)$ **3.** $nx^{n-1}h$; nx^{n-1} **4.** $kL(f)$; $L(f) + L(g)$; D_x

2.4 Derivadas de funciones trigonométricas

La figura 1 nos recuerda la definición de las funciones seno y coseno. En lo que sigue, t debe considerarse como un número que mide la longitud de un arco en el círculo unitario o, de forma equivalente, como el número de radianes en el ángulo correspondiente. Por lo tanto, $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = \cos t$ son funciones para las cuales tanto el dominio como el rango son conjuntos de números reales. Podemos considerar el problema de determinar sus derivadas.

Fórmulas de las derivadas Elegimos utilizar x en lugar de t como nuestra variable básica. Para determinar $D_x(\operatorname{sen} x)$, apelamos a la definición de la derivada y utilizamos la identidad de suma de ángulos para $\operatorname{sen}(x + h)$.